ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ADMISSION 1982
OPTION M'
PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(4 heures)

Correction

-I-

1. On rappelle, pour tout ce qui suit, que si $a_n = O(n^p)$ ($p \in \mathbb{N}$), la rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1, donc ici égal à 1.

$*$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \notin \mathscr{S}_1$

$*$ $s_n = 1 + (-1)^n$, donc $\sigma_n = \dfrac{1}{n+1}(n+1+1+(-1)^n) = \dfrac{2+(-1)^n+n}{2}$ diverge, et de ce fait $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathscr{S}_2$

$*$ En fin, pour $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \dfrac{1}{1+x}$, donc $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ existe et vaut $\dfrac{1}{2}$ et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathscr{S}_3$.

2. Clairement, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \notin \mathscr{S}_1$ puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend vers 0. Montrons ensuite par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$. Ce résultat étant vrai pour $n = 0$, supposons $s_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$.

Si n est pair, $s_n = -\dfrac{n}{2}$ et $s_{n+1} = -\dfrac{n}{2} + (-)^{n+2}(n+1) = -\dfrac{(n+1)+1}{2}$.
Si n est impair, $s_n = \dfrac{n+1}{2}$ et $s_{n+1} = \dfrac{n+1}{2} - (n+1) = \dfrac{(n+1)+1}{2}$.
On constate de même par récurrence que :

$$\begin{cases} \sigma_n = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{n+1}{2} = \dfrac{1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \\ \sigma_n = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \notin \mathscr{S}_2$.

Remarquons ensuite que $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)' = \dfrac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n$, donc $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^n = \dfrac{x}{(1+x)^2}$ admet la limite $\dfrac{1}{4}$ lorsque x tend vers 1^-, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}_3$.

3. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathscr{S}_1$. On a, par hypothèse sur la convergence de la suite de sommes partielles $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall\varepsilon>0,\ \text{il existe } n_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq n_0, |s_n-s|\leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

D'autre part, on a, pour tout entier $n\geq n_0$:

$$|\sigma_n-s| = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}|s_k-s| \leq \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(s_k-s)\right| + \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=n_0}^{n}(s_k-s)\right|$$

On applique alors au deuxième terme l'inégalité (1), pour tout entier $n\geq n_0$:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n}|s_k-s| \leq \frac{(n-n_0+1)\varepsilon}{2(n+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

De plus, le premier terme étant une somme finie de réels, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}(s_k-s)=0$$

Ce qui donne, d'après la définition de la limite :

$$\forall\varepsilon>0,\ \text{il existe } n_1\in\mathbb{N}, \forall n\geq n_1, \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}(s_k-s)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

En posant $n_2=\max(n_0,n_1)$, on obtient :

$$\forall\varepsilon>0, \forall n\geq n_2, |\sigma_n-s|\leq\varepsilon$$

Ce qui permet donc de conclure que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et par conséquent $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\in\mathscr{S}_2$.

Donc $\mathscr{S}_1\subset\mathscr{S}_2$.

4. ***4a.*** La suite $(\sigma)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée car elle est convergente, donc $(n+1)\sigma_n = O(n)$, avec la première question de cette partie, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

Comme $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, le produit de Cauchy de $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ par $\frac{1}{1-x}$ est $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_n$ lorsque ces deux séries absolument convergentes.

Comme $s_n=(n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1} = O(n)$, les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)\sigma_n x^n$ convergent sur $]-1,1[$ et de ce fait :

$$\forall x\in]-1,1[,\ \ \frac{1}{1-x}\times\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = g(x) \tag{2}$$

On prouve de même que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolument pour x dans $]-1,1[$ et que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x} \times \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \tag{3}$$

Avec (2) et (3) il vient

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = (1-x)^2 g(x) \tag{4}$$

4b. Écrivons $\sigma_n = \sigma + \varepsilon_n$ avec $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, et donnons nous pour un réel $\varepsilon > 0$. Il vient, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1-x)^2 g(x) = \sigma \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n\right)(1-x)^2 + (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\varepsilon_n x^n$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

De là

$$(1-x)^2 g(x) = \sigma + (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\varepsilon_n x^n$$

Choisissons $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_\varepsilon$, $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon$. Il vient

$$\begin{aligned}
\left|(1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\varepsilon_n x^n\right| &\leq \left|(1-x)^2 \sum_{n=0}^{n_\varepsilon} (n+1)\varepsilon_n x^n\right| + \left|(1-x)^2 \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} (n+1)\varepsilon_n x^n\right| \\
&\leq \left|(1-x)^2 \sum_{n=0}^{n_\varepsilon} (n+1)\varepsilon_n x^n\right| + \left|(1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\varepsilon_n x^n\right| \\
&= \left|(1-x)^2 \sum_{n=0}^{n_\varepsilon} (n+1)\varepsilon_n x^n\right| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pour $x \in [0,1[$ et donc

$$\forall x \in [0,1[, \quad \left|(1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\varepsilon_n x^n\right| \leq \varepsilon + (1-x)^2 p(x)$$

p étant le polynôme $\sum_{n=0}^{n_\varepsilon} (n+1)\varepsilon_n x^n$. Comme $\lim_{x\to 1^-} (1-x)^2 p(x) = 0$ nous pouvons trouver $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]1-\alpha, 1[, \quad \left|(1-x)^2 p(x)\right| \leq \varepsilon$. Résumons :

$$\forall x \in]1-\alpha, 1[, \quad |f(x) - \sigma| \leq 2\varepsilon$$

ce qui montre que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathscr{S}_3$.

5. On a $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2 \subset \mathscr{S}_3$. Les exemples étudiés dans le deux premières questions de cette partie, montrent que les inclusions sont strictes :

$$\mathscr{S}_1 \subsetneq \mathscr{S}_2 \subsetneq \mathscr{S}_3.$$

-II-

1. **1*a*.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1,1[$, $x^{kn} \in]-1,1[$ et donc $f(x^k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}$, donc par combinaison linéaire de séries convergentes la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n p(x^n)$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P(x^n) = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k f(x^k)$.

De plus, le théorème de comparaison des limites nous permet d'affirmer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n p(x^n)$ admet une limite en 1^- et que

$$\lim_{x\to 1^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n p(x^n) = \lim_{x\to 1^+} \sum_{k=1}^{d} \alpha_k f(x^k) = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k S = Sp(1)$$

où $S = \lim_{x\to 1^-} f(x)$.

1*b*. q est bornée sur $[-1,1]$ donc la suite $(q(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi pour $x \in]-1,1[$, par suite $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n q(x^n)$ est absolument convergente.

Pour $k \in \mathbb{N}$, $(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^{(1+k)n} = (1-x)\times\dfrac{1}{1-x^{k+1}} = \dfrac{1}{1+x+x^2+\ldots+x^k}$, donc $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^{(1+k)n}$ existe et vaut $\dfrac{1}{k+1}$. Par combinaison linéaire $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n q(x^n)$ existe et vaut $\sum_{k=0}^{d'} \dfrac{\beta_k}{k+1} = \int_0^1 q(x)\mathrm{d}x$.

2. Soit $\varepsilon > 0$ et $0 < \alpha < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ avec $M = \sup_{t\in[0,1]} |\psi(t)|$. Pour simplifier supposons par exemple $\psi\left(\dfrac{1}{2}\right) \geq \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \psi(x)$. On construit deux fonctions ψ_1 et ψ_2 continues sur $[0,1]$ par :

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{si } x \in \left[0, \alpha - \dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \\ a_1 x + b_1, & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}+\alpha\right] \end{cases}$$

et

$$\psi_2(x)=\begin{cases}\psi(x), & \text{si } x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right[\cup\left[\dfrac{1}{2}+\alpha,1\right]\\ \psi_2\left(\dfrac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\psi(x) & \\ a_2x+b_2, & \text{si } x\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}+\alpha\right]\end{cases}$$

On a $\forall x\in[0,1]$, $\psi_1(x)\leq\psi(x)\leq\psi_2(x)$ et

$$\int_0^1(\psi_2(x)-\psi_1(x))\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}}(\psi(x)-a_1x-b_1)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\alpha}(a_2x+b_2-\psi(x))\mathrm{d}x\leq 2\alpha M\leq\varepsilon.$$

Puisque ψ_1 et ψ_2 sont continues, il existe d'après le théorème de Weierstrass deux fonctions polynomiales $q_1,q_2:[0,1]\to\mathbb{R}$ telles que $\|q_1-\left(\psi_1-\dfrac{\varepsilon}{8}\right)\|_\infty\leq\dfrac{\varepsilon}{8}$ et $\|\left(\psi_2+\dfrac{\varepsilon}{8}\right)-q_2\|_\infty\leq\dfrac{\varepsilon}{8}$, en particulier $\forall x\in[0,1]$,

$$\psi_1(x)-\frac{\varepsilon}{4}\leq q_1(x)\leq\psi_1(x)$$

et

$$\psi_2(x)\leq q_2(x)\leq\psi_2(x)+\frac{\varepsilon}{4}.$$

D'où $\forall x\in[0,1]$, $q_1(x)\leq\psi_1(x)\leq\psi(x)\leq\psi_2(x)\leq q_2(x)$ et en écrivant $q_2-q_1=(q_2-\psi_2)+(\psi_2-\psi_1)+(\psi_1-q_1)$ on en déduit que

$$\int_0^1(q_2(x)-q_1(x))\mathrm{d}x\leq\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

3. **3*a*.** Soit $\alpha\in]0,1[$. Si $x\in[0,\alpha]$, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$, donc il existe n_α tel que pour tout $n\geq n_\alpha$, $0\leq x^n\leq\dfrac{1}{2}$, donc $\chi(x^n)=0$. Ainsi, la somme de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}a_n\chi(x^n)$ se réduit à une somme finie $\sum\limits_{n=0}^{n_\alpha-1}a_n\chi(x^n)=\sum\limits_{n=0}^{n_\alpha-1}a_n$ sur $[0,\alpha]$, donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}a_n\chi(x^n)$ converge uniformément sur $[0,\alpha]$.

3*b*. Soit $\varepsilon>0$. Introduisons la fonction $\varphi(x)=\dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{\chi(x)}{x}-1\right)$, qui vérifie les hypothèses de la deuxième question de cette partie, en effet, compte-tenu de la valeur de χ, la fonction φ vérifie :

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right[\\ \dfrac{1}{x}, & \text{si } x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}.$$

Il existe donc deux polynômes q_1 et q_2 tels que $q_1\leq\varphi\leq q_2$ et $\displaystyle\int_0^1(q_2-q_1)(x)\mathrm{d}x\leq\varepsilon$. De là $x(1-x)q_1+x\leq\chi(x)\leq x(1-x)q_2+x$ pour tout $x\in[0,1]$, donc avec $p_1=x(1-x)q_1+x$ et $p_2=x(1-x)q_2+x$ on a bien $p_1(1)=p_2(1)$, $p_1(0)=p_2(0)=0$ et

$$\int_0^1\frac{p_2(x)-P_1(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x=\int_0^1(q_2-q_1)(x)\mathrm{d}x\leq\varepsilon.$$

3c. Soit q le polynôme défini par $q(x) = \dfrac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)}$ (0 et 1 sont des racines de $p_2 - p_1$). Avec les résultats de la première question de cette partie, $(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n q(x^n) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{p_2(x^n) - p_1(x^n)}{1-x^n}$ tend vers $\int_0^1 q(x)\mathrm{d}x \leq \varepsilon$ lorsque x tend vers 1^- (1).
On note ensuite que $na_n \leq A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $0 \leq \chi(x^n) - p_1(x^n) \leq p_2(x^n) - p_1(x^n)$ entraîne

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(x^n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n p_1(x^n) \leq A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_2(x^n) - p_1(x^n)}{n} \tag{5}$$

Enfin, si $x \in [0,1[$, $1 - x^n = (1-x)(1 + x + \ldots + x^{n-1}) \leq n(1-x)$, donc

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_2(x^n) - p_1(x^n)}{n(1-x)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1-x) \frac{p_2(x^n) - p_1(x^n)}{1-x^n}$$

Avec (1) nous pouvons conclure que $\lim\limits_{x \to 1^-} A \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{p_2(x^n) - p_1(x^n)}{n} = \int_0^1 q(x)\mathrm{d}x$. Donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [1-\alpha, 1[, \ \left| A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_2(x^n) - p_1(x^n)}{n} - \int_0^1 q(x)\mathrm{d}x \right| \leq A\varepsilon,$$

ou encore

$$\forall x \in [1-\alpha, 1[, \ A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_2(x^n) - p_1(x^n)}{n} \leq (A+1)\varepsilon,$$

d'où la première inégalité d'après (3) :

$$\forall x \in [1-\alpha, 1[, \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_1(x^n) \leq (A+1)\varepsilon$$

On obtient immédiatement l'autre inégalité.

Convergence de S : Avec le résultat de la première question de cette partie, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p_i(x^n)$ tend vers $Sp_i(1) = S$ lorsque x tend vers 1^- ($i = 1, 2$). On peut donc trouver $\beta \in]0, \alpha[$ tel que

$$\begin{cases} \forall x \in [1-\beta, 1[, \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(x^n) \leq S + (A+2)\varepsilon \\ \forall x \in [1-\beta, 1[, -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(x^n) \leq -S + (A+2)\varepsilon \end{cases}$$

Donc, si $n \geq \left[\dfrac{-\ln 2}{\ln(1-\beta)}\right] + 1$ et $x = \exp\left(\dfrac{-\ln 2}{n}\right)$, on a $x \in [1-\beta, 1[$ et

$$S - (A+2)\varepsilon \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi(x^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \leq S + (A+2)\varepsilon$$

D'où le résultat : La série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge de somme S.

3d. Soit $\varepsilon > 0$. La suite des restes associée à la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge vers 0, donc il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| \leq \varepsilon$.

Alors si $x \in [0,1]$, et si $n \geq n_\varepsilon$, $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\chi(x^k)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \varepsilon$. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\chi(x^n)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

4. ***4a.*** Oui il suffit d'appliquer le résultat avec la suite de terme général $a_n = -b_n$.

4b. Oui, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $b_{p^2} = \dfrac{1}{p^{\frac{3}{2}}}$ et $b_n = 0$ si $n \neq p^2$. Alors $b_n \geq 0$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ converge, donc avec le résultat de première partie $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \in \mathscr{S}_3$, enfin $\lim_{p\to\infty} p^2 b_{p^2} = +\infty$ ce qui donne $\sup_{n\in\mathbb{N}} nb_n = +\infty$.

4c. Immédiat en appliquant les résultats de la troisième question de la deuxième partie à $(\mathbf{Re}(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathbf{Im}(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$: $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ converge.

4d. Oui, la suite de terme général $d_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$, la série $\sum_{n\geq 2} d_n$ converge moyennant le critère spécial des séries alternées.

●●●●●●●●●●●